Ueber die Anziehung homogener Polyeder, wenn die Elementaranziehung einer beliebigen Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht von

August Maurer
aus Homburg v. d. H.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1885.

Ueber die
Anziehung homogener Polyeder, wenn die
Elementaranziehung einer beliebigen Potenz
der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Herrn Professor E. Hess

in dankbarer Verehrung

gewidmet vom

Verfasser.

Herrn Professor E. Hess

in dankbarer Verehrung

gewidmet vom

Verfasser.

§ 1.

Die Componenten der Anziehung eines Körpers auf einen Punkt lassen sich für ein beliebiges Anziehungsgesetz als die partiellen Differentialquotienten einer Funktion der Raumcoordinaten des afficirten Punktes darstellen. Diese Funktion, Kräftefunktion, und in dem besonderen Falle, dass die Anziehungskraft dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist, Potentialfunktion genannt, wird im allgemeinen durch ein über den anziehenden Körper auszudehnendes Integral dargestellt, das sich für gewisse Formen des Körpers bestimmen lässt.

Als Anziehungsgesetz werde nun das Folgende festgesetzt:

Die Elementaranziehung sei proportional den Massen und umgekehrt proportional einer beliebigen ganzen Potenz der Entfernung.

Die Kräftefunktion, U, wird dann durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$U = \frac{1}{n-1} \int \frac{dm}{r^{n-1}}. \tag{1}$$

Es fragt sich vorerst ob dieses Integral, das über die gesammte Masse des Körpers auszudehnen ist, für jeden beliebigen Punkt im Raume einen bestimmten endlichen Werth hat. Für solche Punkte die ausserhalb des anziehenden Körpers liegen, ist dieses offenbar der Fall, denn die zu integrirende Funktion bleibt überall endlich und erreicht ein Minimum, wenn der angezogene Punkt im Unendlichen liegt. Nehmen wir dagegen an, der afficirte Punkt läge im Inneren des Körpers,

so wird $\frac{1}{r^{n-1}}$ für die in unmittelbarer, unendlich kleiner Entfernung von ihm liegenden Massentheilchen unendlich gross. Für diesen Fall bedarf es deshalb einer besonderen Untersuchung, ob das Integral endlich ist oder keinen Sinn mehr hat. Das in dem speciellen Falle der Newton'schen Anziehung, $n = 2$, angewandte Verfahren, den Ausdruck durch Einführung von Polarcoordinaten umzugestalten und hierdurch die Unbestimmtheit aufzuheben, führt zu keinem für die Entscheidung brauchbaren Resultate, sobald $n \geqq 4$ ist. Wir müssen uns deshalb in den folgenden Untersuchungen auf den Fall ausserhalb des Körpers liegender Punkte beschränken.

Für unseren Zweck, die Bestimmung der Kräftefunktion eines homogenen Polyeders für das angegebene allgemeine Anziehungsgesetz, ist es nun wünschenswerth, das Integral

$$U = \frac{1}{n-1} \int \frac{dm}{r^{n-1}}$$

in ein anderes zu verwandeln, welches nur noch über die Oberfläche des Körpers auszudehnen ist, in ähnlicher Weise, wie Gauss das Integral, durch welches die Potentialfunktion dargestellt wird

$$\int \frac{dm}{r}$$

in

$$\frac{1}{2} \int \frac{h\, dw}{r}$$

umwandelte, worin dw das Oberflächenelement bedeutet.

Setzen wir die Dichte des Körpers gleich der Einheit, so bedeutet dm das Element des Volumens. Es ist aber

$$dm = r^2\, dr\, .\, d\sigma$$

wo $d\sigma$ das Oberflächenelement der um den afficirten Punkt — er werde immer mit P bezeichnet — mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel bedeutet. Man erhält jetzt:

$$U = \frac{1}{n-1} \int d\sigma \int \frac{dr}{r^{n-3}}$$

Die Integration nach r ist ausführbar. Nehmen wir an der Leitstrahl r treffe die Oberfläche des Körpers in mehreren Punkten, deren Anzahl eine gerade sein muss und deren Entfernungen von P bezüglich $R_1\ R_2\ R_3\ \ldots\ldots$ sind, so erstreckt sich die Integration nach r über die Strecken zwischen R_1 und R_2, R_3 und R_4 u. s. w. Man hat also

$$\int \frac{dr}{r^{n-3}} = \frac{-1}{n-4}\left\{ - \frac{1}{R_1^{n-4}} + \frac{1}{R_2^{n-4}} - \frac{1}{R_3^{n-4}} + \frac{1}{R_3^{n-4}} - \ldots\ldots \right\}$$

und erhält jetzt:

$$U = \frac{-1}{n-1 \,.\, n-4} \int \left\{ - \frac{1}{R_1^{n-4}} + \frac{1}{R_2^{n-4}} - \frac{1}{R_3^{n-4}} + \ldots\ldots \right\} d\sigma.$$

Nun ist aber

$$R_1^2\, d\sigma = \cos i_1\ dw_1$$

wo dw_1 das Oberflächenelement in dem ersten Durchschnittspunkte und i_1 den Winkel bedeutet, welchen die Normale von P auf die durch dw_1 gelegte Tangentialebene mit dem Leitstrahl bildet. Bei analoger Bedeutung von w_2, w_3, ... , i_2, i_3, ... , ist ebenso

$$R_2^2\, d\sigma = \cos i_2\, dw_2$$
$$R_3^2\, d\sigma = \cos i_3\, dw_3$$

u. s. w.

Setzen wir

$$\cos i_1 = \frac{h_1}{R_1},$$

wo h_1 die Länge jener Normale bedeutet, ebenso

$$\cos i_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

u. s. w., so folgt

$$d\sigma = \frac{h_1\, dw_1}{R_1^3} = \frac{h_2\, dw_2}{R_2^3} = \ldots\ldots$$

Setzen wir diese Werthe für $d\sigma$ bezüglich ein und bestimmen, dass die Normalen h_1 h_2..,.. immer positiv zu nehmen sind, wenn ihr Fusspunkt auf der dem Körper zugewandten Seite der Tangentialebene, negativ dagegen wenn er auf der dem Körper abgewandten Seite derselben liegt, so werden alle Glieder unter dem Integralzeichen positiv und wir erhalten

$$U = \frac{-1}{n-1 \,.\, n-4} \int \left\{ \frac{h_1 \, dw_1}{R_1^{n-1}} + \frac{h_2 \, dw_2}{R_2^{n-1}} + \ldots\ldots \right\}$$

wofür wir einfach schreiben können:

$$U = \frac{-1}{n-1 \,.\, n-4} \int \frac{h \, dw}{r^{n-1}} \tag{2}$$

welches Integral für U nur noch über die Oberfläche auszudehnen ist. In der That erhalten wir auch hieraus für $n = 2$ das Gauss'sche Integral

$$\frac{1}{2} \int \frac{h \, dw}{r} .$$

Für die speciellen Fälle $n = 1$ und $n = 4$ folgt aus (2) für U der Werth unendlich. Es muss daraus geschlossen werden, dass für diese Fälle die Kräftefunktion nicht durch (2) dargestellt werden kann.

Geschieht in der That die Anziehung umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung, so wird die Kräftefunktion dargestellt durch den Ausdruck

$$- \int l \,.\, r \, dm = \int l \,.\, \left(\frac{1}{r}\right) dm$$

und wenn dieses Integral wie oben in ein anderes über die Oberfläche zu erstreckendes verwandelt wird, so erhält man

$$- \frac{1}{3} \int h \left(l \,.\, r - \frac{1}{3} \right) dw$$

durch welches Integral jetzt die Kräftefunktion dargestellt wird.

Ist aber $n = 4$, dann hat man für die Kräftefunktion:

$$\frac{1}{3} \int \frac{dm}{r^3}$$

und durch die Umwandlung dieses Integrals in ein über die Oberfläche zu erstreckendes erhält man

$$\frac{1}{3}\int \frac{l.r}{r^3}\, dw\,.$$

Die Form (2) für die Kräftefunktion hat also keine Gültigkeit für die Werthe $n = 1$ und $n = 4$.

Wir gehen nun zu der Aufgabe über, die Kräftefunktion eines homogenen Polyeders für das festgesetzte allgemeine Anziehungsgesetz zu bestimmen. Die Potentialfunktion eines homogenen Polyeders, d. h. der Fall $n = 2$ der allgemeinen Entwicklung, ist bereits im Bande 66 des Crelle'schen Journals von Mehler bestimmt worden. Die Lösung der Aufgabe wird hier auf die Form

$$U = \frac{1}{2}\int \frac{h\, dw}{r}$$

der Potentialfunktion gegründet. Da jedoch die Newton'sche Anziehung jedenfalls das grösste Interesse beansprucht, da ferner mehrfache Beziehungen zu den allgemeineren Entwicklungen dabei auftreten, so erscheint es zweckmässig zuerst eine Lösung dieses Problems zu geben, welche jedoch von der Mehlerschen wesentlich verschieden ist und einen möglichst direkten Weg innehält.

In § 2 werden wir also das Newton'sche, in den folgenden §§ dagegen das allgemeinere Anziehungsgesetz zu Grunde legen und zwar werden wir in § 4 die Kräftefunktion eines homogenen Polyeders betrachten, wenn die Anziehung umgekehrt proportional einer geraden und in § 5 die Kräftefunktion wenn die Anziehung umgekehrt proportional einer ungeraden Potenz der Entfernung ist.

---

§ 2.

$n = 2$

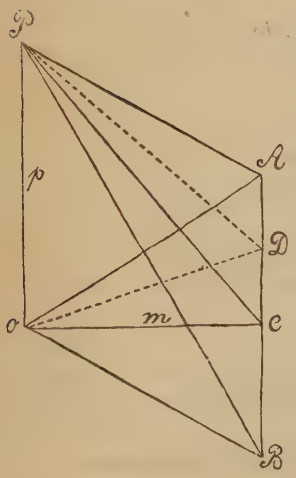
Man denke sich sämmtliche Ecken des Polyeders mit dem angezogenen Punkte, P, welcher innerhalb oder ausserhalb des Polyeders liegen kann, verbunden. Es entstehen dadurch Pyramiden, die je eine Begrenzungsfläche des Polyeders zur Basis und den Punkt P zum gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben. Das Volumen des Polyeders kann man sich zerlegt denken, wenn P im Inneren desselben liegt, in die Summen der Volumina aller Pyramiden, wenn dagegen P im äusseren Raume liegt, in die Summe der Volumina aller Pyramiden, in in welchen der Fusspunkt ihrer Höhe auf der Innenseite des die Basis bildenden Begrenzungspolygons liegt, vermindert um die Summe derer, in welchen das umgekehrte statt hat. Oder es ist sowohl für ein inneres als auch äusseres P der körperliche Inhalt des Polyeders gleich der Summe der Inhalte aller Pyramiden, unter der Bedingung, dass man dieselben positiv oder negativ nehme, je nachdem die Fusspunkte der Höhen auf der Innen- oder Aussenseite des bezüglichen Begrenzungspolygons liegen. Unter denselben Voraussetzungen ist somit die Potentialfunktion des Polyeders gleich der Summe der Potentialfunktionen der durch die Verbindung von P mit den Ecken entstandenen Pyramiden in Bezug auf ihren Scheitelpunkt. Die Aufgabe reducirt sich also darauf, die Potentialfunktion einer beliebigen Pyramide in Bezug auf ihren Scheitelpunkt zu bestimmen.

Diese Aufgabe lässt sich durch eine einfache Integration lösen, wenn die Potentialfunktion der Basis oder vielmehr die eines beliebigen zur Basis parallelen Durchschnitts in Bezug auf P bekannt ist. Denn diese ist nur noch mit dem Differential der Höhe zu multipliziren und zwischen den Grenzen 0 und h derselben zu integriren.

Der Durchschnitt, ein der Basis ähnliches Polygon, werde von der Höhe der Pyramide in der Entfernung p von

P durchschnitten. Verbindet man den Fusspunkt 0 mit sämmtlichen Ecken des Polygons, so kann man den Inhalt des letzteren gleich der Summe der Inhalte der entstehenden Dreiecke setzen, in analoger Weise wie es oben mit dem Polyeder geschehen ist. Ebenso wie dort müssen wir aber auch hier festsetzen, dass die von 0 auf die Seiten des Polygons gefällten Senkrechten, und ebenso die Dreiecke selbst, positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem die Fusspunkte jener auf der Innen- oder Aussenseite der zugehörigen Polygonseite liegen.

Eines der Dreiecke, die je eine Seite des Polygons zur Basis und den Punkt 0 zur gemeinschaftlichen Spitze haben, zerlegen wir uns wieder in die Summe oder Differenz zweier rechtwinkliger Dreiecke durch die von der Spitze auf die Basis $\overline{AB}$ gefällte Senkrechte $\overline{OC}$. (s. Fig.) Da nun die Potentialfunktion des Polygons gleich der Summe der Potentialfunktionen der Dreiecke ABO u. s. w ist, eine solche aber wieder gleich der Summe oder Differenz der Potentialfunktionen der Dreiecke ACO und BCO, so handelt es sich wesentlich um die Bestimmung der Potentialfunktionen der Dreiecke ACO und BCO in Bezug auf P.



Es werde OP zur ZAxe, OC zur XAxe und O selbst zum Anfangspunkt des Coordinatensystems gemacht. Dann ist die gesuchte Potentialfunktion des Dreiecks ACO, welche wir mit v_1 bezeichnen wollen:

$$v_1 = \int\int \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+p^2}}.$$

Die Grenzen der Integration nach y sind 0 und y_1, diejenigen der Integration nach x: 0 und m, wenn m die Länge des Perpendikels $\overline{OC}$ bedeutet. Führen wir Polarcoordinaten ein, so ist

statt $dx\,dy$ $u\,du\,d\delta$ statt $\sqrt{x^2+y^2+p^2}$ aber $\sqrt{u^2+p^2}$ zu setzen. Die Grenzen der Integration nach u sind 0 und $\frac{m}{\cos\delta}$, die der Integration nach δ aber 0 und δ'. Dabei bedeutet δ den variablen Winkel COD, δ' den Winkel COA. Es wird also

$$(1) \qquad v_1 = \int_0^{\delta_1} d\delta \int_0^{\frac{m}{\cos\delta}} \frac{u\,du}{\sqrt{u^2+p^2}}.$$

Die Integration nach u ergiebt:

$$\sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta}+p^2}-p$$

so dass man erhält

$$(2) \qquad v_1 = \int_0^{\delta_1} \sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta}+p^2}\,.\,d\delta - p\int_0^{\delta_1} d\delta$$

Zur Berechnung des unbestimmten Integrals

$$\int \sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta}+p^2}\,.\,d\delta$$

substituiren wir

$$\frac{m^2}{\cos^2\delta}+p^2 = y^2$$

$$d\delta = m\,\frac{y\,dy}{(y^2-p^2)\sqrt{y^2-p^2-m^2}}.$$

Wir erhalten das Integral

$$m\int \frac{y^2\,dy}{(y^2-p^2)\sqrt{y^2-p^2-m^2}}$$

und hierfür, wenn wir im Zähler $+p^2-p^2$ hinzufügen:

$$m\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-p^2-m^2}}+mp^2\int\frac{dy}{(y^2-p^2)\sqrt{y^2-p^2-m^2}}=$$

$$m\,.\,l\,.(y+\sqrt{y^2-p^2-m^2})+mp^2\int\frac{dy}{(y^2-p^2)\sqrt{y^2-p^2-m^2}}$$

Das noch aufzulösende Integral lässt sich entweder auf *arcsin* oder auf *arc g* zurückführen. Es empfiehlt sich, zum Zwecke der Vergleichung beide Rechnungen durchzuführen.

Wir substituiren in

$$\int\frac{dy}{(y^2-p^2)\sqrt{y^2-p^2-m^2}}$$

$$y^2-p^2=\frac{1}{z}\,,$$

und erhalten:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{(p^2z+1)(-m^2z+1)}}=$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{-p^2m^2z^2+(p^2-m^2)z+1}}=$$

$$-\frac{1}{2pm}\,arcsin\left\{\left(z-\frac{p^2-m^2}{2p^2m^2}\right)\frac{2p^2m^2}{p^2+m^2}\right\}=$$

$$-\frac{1}{2pm}\,arcsin\left\{\left(\frac{1}{y^2-p^2}-\frac{p^2-m^2}{2p^2m^2}\right)\frac{2p^2m^2}{p^2+m^2}\right\}$$

Durch Restutition von $\frac{m^2}{cos^2\delta}+p^2$ für y^2 folgt schliesslich für das gesuchte Integral:

$$\int\sqrt{\frac{m^2}{cos^2\delta}+p^2}\,.\,d\delta=m\,l\,.\left\{\sqrt{\frac{m^2}{cos^2\delta}+p^2}+m\,tg\,\delta\right\}$$

$$-\frac{p}{2}\,arcsin\left\{\left(\frac{cos^2\delta}{m^2}-\frac{p^2-m^2}{2p^2m^2}\right)\frac{2p^2m^2}{p^2+m^2}\right\}$$

Führen wir jetzt die Grenzen 0 und δ' ein, so folgt da noch

$$p \int_0^{\delta_1} d\delta = p\delta'$$

ist aus (2)

$$v_1 = -p\delta' + ml \cdot \frac{\sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta'} + p^2} + m\,tg\,\delta'}{\sqrt{m^2+p^2}}$$

$$-\frac{p}{2}\,arcsin\left\{\left(\frac{\cos^2\delta'}{m^2} - \frac{p^2-m^2}{2p^2m^2}\right)\frac{2p^2m^2}{p^2+m^2}\right\} + \frac{p}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\ .$$

$\frac{m}{\cos\delta'}$ bedeutet die Strecke $\overline{OA}$, also ist $\sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta'} + p^2}$ gleich der Strecke $\overline{PA}$, welche wir mit r_1 bezeichnen wollen. $m\,tg\delta'$ ist gleich der Strecke $\overline{AC}$, welche gleich s_1 gesetzt werde. Bezeichnen wir schliesslich noch die Strecke PC mit l, so ergiebt sich:

$$v_1 = -p\delta' + ml \cdot \frac{r_1+s_1}{l} - \frac{p}{2}\,arcsin\frac{p^2\cos 2\delta' + m^2}{p^2+m^2} + \frac{p}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Führen wir noch den Winkel PAB ein und bezeichnen denselben mit φ, so ist

$$\frac{r_1+s_1}{l} = ctg\,\frac{\varphi}{2}$$

und es ergibt sich:

$$(3)\quad v_1 = -p\delta' + ml \cdot ctg\,\frac{\varphi}{2} - \frac{p}{2}\,arcsin\frac{p^2\cos 2\delta' + m^2}{p^2+m^2} + \frac{p}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Ganz in analoger Weise findet man die Potentialfunktion des Dreiecks BCO. Bezeichnen wir dieselbe mit v_2, so ergiebt sich

$$(3_\alpha)\quad v_2 = -p\delta'' + m\,l\,ctg\,\frac{\psi}{2} - \frac{p}{2}\,arcsin\frac{p^2\cos 2\delta'' + m^2}{p^2+m^2} + \frac{p}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Es bedeuten hier ψ und δ'' bezüglich die Winkel PBA und BOC.

Für die Potentialfunktion des Dreiecks ABO, welche mit v bezeichnet werde, haben wir nun

$$v = v_1 \pm v_2 ,$$

je nachdem das Dreieck ABO aus der Summe oder der Differenz der Dreiecke AOC und BOC gebildet wird. Man erhält, wenn man v im ersten Falle mit v_s, im letzteren mit v_d bezeichnet und wenn α in beiden Fällen den Winkel AOB bedeutet:

$$v_s = -p\alpha + ml \,.\, ctg\frac{\varphi}{2}\, ctg\frac{\psi}{2} - \frac{p}{2} arcsin\frac{p^2 cos2\delta' + m^2}{p^2 + m^2}$$
$$- \frac{p}{2} arcsin\frac{p^2 cos2\delta'' + m^2}{p^2 + m^2} + \frac{p}{2}\pi .$$

$$v_d = -p\alpha + ml \,.\, ctg\frac{\varphi}{2}\, ctg\frac{\psi}{2} - \frac{p}{2} arcsin\frac{p^2 cos2\delta' + m^2}{p^2 + m^2}$$
$$+ \frac{p}{2} arcsin\frac{p^2 cos2\delta'' + m^2}{p^2 + m^2} .$$

Die beiden Werthe für v gestalten sich einfacher, wenn man für *arcsin arctg* einführt. Man benutze in dem Ausdruck v_s die Beziehung

$$\frac{\pi}{2} - arcsin\, x = arc\, cos\, x = arctg\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} .$$

dann wird man leicht erhalten

$$\frac{\pi}{2} - arcsin\frac{p^2 cos\, 2\delta' + m^2}{p^2 + m^2} = arctg\frac{\sqrt{p^4 sin^2 2\delta' + 4p^2 m^2 sin^2\delta'}}{p^2 cos2\delta' + m^2}$$

Es ist aber

$$cos\,\delta' = \frac{m}{\sqrt{m^2 + s_1{}^2}}$$

so dass man erhält

$$\frac{\pi}{2} - arcsin \frac{p^2 \cos 2\delta' + m^2}{p^2 + m^2} = arctg \frac{2pms_1r_1}{m^2r_1^2 - p^2s_1^2}$$

$$= arctg \frac{2\frac{ps_1}{mr_1}}{1 - \left(\frac{ps_1}{mr_1}\right)^2}$$

$$= 2arctg \frac{ps_1}{mr_1}$$

Jetzt erhalten wir

$$v_s = -p\alpha + ml \,.\, ctg \frac{\varphi}{2} ctg \frac{\psi}{2} + p\, arctg \frac{ps_1}{mr_1} + p\, arcty \frac{ps_2}{mr_2}$$

Fügen wir in obigem Ausdrucke für v_d den Werth $+ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$ hinzu, so findet sich durch dieselben Umformungen

$$v_d = -p\alpha + ml \,.\, ctg \frac{\varphi}{2} ctg \frac{\psi}{2} + p\, arctg \frac{ps_1}{mr_1} - p\, arctg \frac{ps_2}{mr_2}$$

r_2 und s_2 bedeuten hierbei bezüglich die Strecken PB und CB.

Die vorliegenden Werthe v_s und v_d unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen des letzten Gliedes. Bedenkt man aber, dass, wenn das Dreieck ABO gleich der Differenz der Dreiecke AOC und BOC ist, das ganz ausserhalb der Strecke AB liegende Stücke derselben s_2 negativ zu nehmen ist, so ist die Uebereinstimmung der beiden Werthe evident. Führen wir $\cos\varphi$ für $\frac{s_1}{r_1}$ und $\cos\psi$ für $\frac{s_2}{r_2}$ ein, so erhalten die *arctg* schon von selbst ihr richtiges Vorzeichen und wir erhalten als allgemein gültiges Resultat:

$$(4) \quad v = -p\alpha + ml \,.\, ctg \frac{\varphi}{2} ctg \frac{\psi}{2} + p\, arctg \frac{p}{m} \cos\varphi + p\, arctg \frac{p}{m} \cos\psi \,.$$

Dasselbe Resultat lässt sich noch, wie wir schon sagten, durch eine andere Art der Integration von

$$\int \sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta} + p^2} \, . \, d\delta$$

herleiten, welche direkt auf *arctg* führt. Wir setzen wieder

$$\frac{m^2}{\cos^2\delta} + p^2 = y^2$$

Es folgt

$$\int \sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta} + p^2} \, . \, d\delta = m \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - p^2 - m^2}} +$$

$$+ p^2 m \int \frac{dy}{(y^2 - p^2)\sqrt{y^2 - p^2 - m^2}}$$

Das letzte Integral rechts bringen wir in folgende Form:

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(y^2)}{y^2 (y^2 - p^2) \frac{\sqrt{y^2 - p^2 - m^2}}{y}}$$

und wenden jetzt die Substitution an

$$\frac{y}{\sqrt{y^2 - p^2 - m^2}} = z$$

Es wird

$$y^2 = \frac{-z^2 (p^2 + m^2)}{1 - z^2}$$

$$y^2 - p^2 = \frac{-z^2 m^2 - p^2}{1 - z^2}$$

$$d(y^2) = -\frac{2 (p^2 + m^2) z \, dz}{(1 - z^2)^2}$$

und man erhält für das gesuchte Integral das transformirte

$$-\int \frac{dz}{z^2 m^2 + p^2}$$

und für dieses

$$-\frac{1}{pm} \operatorname{arctg} \frac{m}{p} z \, .$$

Restituiren wir die Variable δ, fügen die Coefficienten und übrigen Glieder hinzu, setzen dann die Grenzen 0 und δ' ein, so erhalten wir schliesslich

$$v_1 = -p\delta' + ml \cdot ctg\,\frac{\varphi}{2} - p\,arctg\,\frac{mr_1}{ps_1} + p\,\frac{\pi}{2}.$$

Da aber

$$\frac{\pi}{2} - arctg\,\frac{mr_1}{ps_1} = arctg\,\frac{ps_1}{mr_1}$$

ist, so erhält man, da für v_2 ein analoger Werth gefunden wird, wie oben:

$$v = -p\alpha + ml \cdot ctg\,\frac{\varphi}{2}\,ctg\,\frac{\psi}{2} + p\,arctg\,\frac{p}{m}\cos\varphi + parctg\,\frac{p}{m}\cos\psi.$$

oder

$$v = -p\left(\alpha - arctg\,\frac{p}{m}\cos\varphi - arctg\,\frac{p}{m}\cos\psi\right) + ml \cdot etg\,\frac{\varphi}{2}\,ctg\,\frac{\psi}{2}$$

und hierfür

$$v = -pf + ml \cdot ctg\,\frac{\varphi}{2}\,ctg\,\frac{\psi}{2} \tag{5}$$

wenn zur Abkürzung

$$\alpha - arctg\,\frac{p}{m}\cos\varphi - arctg\,\frac{p}{m}\cos\psi = f$$

gesetzt wird, wobei f, wie Mehler gezeigt hat und was sich leicht verificiren lässt, den Inhalt des sphärischen Dreiecks bedeutet, welches eine um den Punkt P mit dem Radius 1 beschriebene Kugel aus der Pyramide $AB0 - P$ ausschneidet.

Nachdem wir nun in (4) und (5) die Potentialfunktion des Dreieks ABO bestimmt haben, finden wir die Potentialfunktion des in Betracht gezogenen Polygons, wenn wir die Summe der Potentialfunktionen aller der Dreiecke bilden, aus welchen wir uns jenes zusammengesetzt gedacht haben.

Bezeichnen wir den gesuchten Werth mit V, so findet man

$$V = -p \cdot 2\pi\varepsilon + \sum ml \cdot ctg\,\frac{\varphi}{2}\,ctg\,\frac{\psi}{2} + \tag{6}$$

$$+ p\sum\left\{arctg\,\frac{p}{m}\cos\varphi + arctg\,\frac{p}{m}\cos\psi\right\}$$

wenn ε die Zahl 0 oder 1 bedeutet, je nachdem der Punkt 0 ausserhalb oder innerhalb des Polygons liegt. In abgekürzter Form lässt sich V auch folgendermassen schreiben

$$V = -pF + \sum ml \cdot ctg\frac{\varphi}{2} ctg\frac{\psi}{2} \tag{7}$$

wo F jetzt den Inhalt des sphärischen Polygons bedeutet, welches durch eine um P als Mittelpunkt mit dem Radius 1 beschriebene Kugel aus der gesammten Pyramide, deren Basis ein Begrenzungspolygon und deren Scheitelpunkt P ist, ausgeschnitten wird.

Durch die Gleichungen (6) oder (7) ist die Potentialfunktion für die Fläche des zur Basis der Pyramide parallelen Durchschnittspolygons bestimmt. Wollen wir jetzt von der Potentialfunktion dieser Fläche zu der Potentialfunktion der ganzen Pyramide übergehen, so haben wir den erhaltenen Werth von V mit dp zu multipliziren und zwischen den Grenzen der Höhe der Pyramide 0 und h zu integriren.

Erwähnt sei hier noch der besondere Fall, wenn P in der Ebene eines Begrenzungspolygons liegt. Da hier die durch Verbindung der Ecken des Polygons mit P entstehende ebne Figur als eine verschwindende Raumgrösse zu betrachten ist, so ist ihre Potentialfunktion gleich 0 zu setzen.

Bedeutet nun P die Potentialfunktion der Pyramide, so wird:

$$P = \int_0^h V dp ,$$

und für V seinen Werth aus (7) eingesetzt:

$$P = \int_0^h \left(-pF + \sum m \cdot l \cdot ctg\frac{\varphi}{2} ctg\frac{\psi}{2}\right) dp .$$

F, φ und ψ sind constant. Setzen wir $m = p\,tg\,\eta$, wo η den ebenfalls constanten Winkel OPC bedeutet, so ist:

$$P = \int_0^h \left(-pF + p \sum tg\,\eta\, l \,.\, ctg\,\frac{\varphi}{2}\, ctg\,\frac{\psi}{2} \right) dp$$

hieraus folgt:

$$P = \frac{h}{2}\left(-hF + \sum ml \,.\, ctg\,\frac{\varphi}{2}\, ctg\,\frac{\psi}{2} \right).$$

Anmerkung: m bedeutet jetzt in analoger Weise wie seither die Senkrechte von dem Fusspunkt der Höhe innerhalb der Basis auf die Seite der Basis, ebenso φ und ψ die analogen Winkel an der Basis selbst.

Der in der Klammer vorstehenden Werthes von P stehende Ausdruck bedeutet aber die Potentialfunktion der Grundfläche der Pyramide. Behalten wir dafür die Bezeichnung V ebenfalls bei, so ist:

$$P = \frac{h}{2} V$$

d. h. die Potentialfunktion einer homogenen Pyramide in Bezug auf ihren Scheitelpunkt wird gefunden, indem man die Potentialfunktion der mit Masse belegten Grundfläche mit der halben Höhe multiplizirt.

Wir hatten uns nun zur Bestimmung der Potentialfunktion des Polyeders dasselbe in eine Summe von Pyramiden zerlegt, die je eine Begrenzungsfläche zur Basis und den afficirten Punkt P zur gemeinschaftlichen Spitze haben. Bezeichnen wir die Potentialfunktion derselben mit $P_1\ P_2\ \ldots\ldots\ P_n$, so erhalten wir für die Potentialfunktion, U, des Polyeders

$$U = P_1 + P_2 + \ldots\ldots P_n = \sum P$$

oder

$$U = \frac{1}{2} \sum h\, V$$

oder als Endresultat:

$$(8) \qquad U = \frac{1}{2} \sum h \left\{ -hF + \sum ml \,.\, ctg\,\frac{\varphi}{2}\, ctg\,\frac{\psi}{2} \right\}.$$

Durch die vorliegende Entwicklung wird man auch auf eine neue Weise auf das Integral

$$\frac{1}{2}\int \frac{h dw}{r}$$

geführt, welches Gauss für die Potentialfunktion aufgestellt hat.

Denken wir uns nämlich die beliebig gestaltete Oberfläche eines Körpers in ihre Elemente dw zerlegt und die Punkte des Umfangs eines jeden Oberflächenelements mit dem affizirten Punkte verbunden, so können wir das Volumen des Körpers betrachten als die Summe der Volumina der unendlich vielen Elementarpyramiden, wenn wir dabei in bekannter Weise das Vorzeichen der Normalen h auf die Tangentialebene berücksichtigen. Man findet aber, wie wir gesehen haben, die Potentialfunktion einer solchen Pyramide, in dem man die Potentialfunktion der Basis mit der halben Höhe multiplizirt. Die Potentialfunktion der Basis ist nun

$$\frac{dw}{r},$$

die einer Elementarpyramide also

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{dw}{r}.$$

Die über sämmtliche Oberflächenelemente erstreckte Summirung dieser Grösse ergibt schliesslich die Potentialfunktion des Körpers, und da jene in eine Integration übergeht, so erhält man für diese das Gauss'sche Integral

$$\frac{1}{2}\int \frac{h dw}{r}.$$

---

§ 3.

Nachdem wir die Potentialfunktion eines homogenen Polyeders berechnet haben, gehen wir dazu über die Entwicklungen zu verallgemeinern, indem wir ein Anziehungsgesetz

festsetzen, wonach die Elementaranziehung umgekehrt proportional der n. Potenz der Entfernung ist. Die Kräftefunktion wird dann durch den Werth (1) in § 1 dargestellt. Wollten wir aber jetzt in ähnlicher Weise wie in dem vorhergehenden § das Polyeder in eine Summe von Pyramiden zerlegen und die Kräftefunktion einer solchen in Bezugauf P, ihren gemeinsamen Scheitelpunkt, bestimmen, so würde das Resultat in unbestimmter Form erscheinen, da der Punkt P einer jeden Pyramide selbst angehört, und die Kräftefunktion in einem solchen Falle durch ein Integral dargestellt wird, welches vorerst ein ganz unbestimmtes Resultat liefert. Deshalb machen wir in den folgenden Entwicklungen von der in (2) § 1 enthaltenen Form der Kräftefunktion Gebrauch. Es ist darnach

$$U = \frac{-1}{n-1 \,.\, n-4} \int \frac{h dw}{r^{n-1}} .$$

Ist der anziehende Körper aber ein Polyeder, so ist h für jede einzelne Begrenzungsfläche desselben constant; für die Kräftefunktion eines homogenen Polyeders haben wir somit

$$U = \frac{-1}{n-1 \,.\, n-4} \sum h \int \frac{dw}{r^{n-1}} . \tag{1}$$

Bestimmen wir also

$$Q = \int \frac{dw}{r^{n-1}} ,$$

welches Integral über die Fläche eines Begrenzungspolygons auszudehnen ist, so folgt

$$U = \frac{-1}{n-1 \,.\, n-4} \sum hQ .$$

Zur Bestimmung von Q fällen wir von P, welcher Punkt jetzt als ausserhalb des Polyeders liegend zu denken ist, eine Senkrechte auf die Ebene des in Betracht gezogenen Polygons und verbinden den Fusspunkt O derselben mit sämmtlichen Ecken des Polygons. Dann können wir wiederum die Kräftefunktion des Polygons in die Summe der Kräftefunktionen der

entstehenden Dreiecke zerlegen, vorausgesetzt, dass wir die von O auf die Polygonseiten gefällten Lothe positiv oder negativ nehmen, je nachdem ihre Fusspunkte auf der inneren oder äusseren Seite jener liegen. Ein solches Dreieck ABO zerlegen wir nochmals in die Summe oder Differenz der Dreiecke AOC und BOC und bestimmen nun die Kräftefunktion des Dreiecks AOC, die wir mit u_1 bezeichnen wollen.

Anmerkung: Wegen der Analogie der geometrischen Beziehungen mit den in § 2 enthaltenen, verweisen wir auf die pg. 11 gegebene Figur, in welcher nur statt des variabelen p die Bezeichnung h für die Höhe einzuführen ist

Es wird

$$(2) \qquad u_1 = \int_0^{\delta_1} d\delta \int_0^{\frac{m}{\cos\delta}} \frac{u\,du}{(\sqrt{u^2+h^2})^{n-1}}$$

Die Bestimmung dieses Integrals hängt davon ab ob n gerade oder ungerade ist, wir müssen deshalb die Untersuchung hier, den beiden Fällen entsprechend, theilen.

---

§ 4.

$$n = 2k.$$

Setzen wir, wenn n gerade ist, $n = 2k$, so erhalten wir

$$(1) \qquad u_1 = \int_0^{\delta_1} d\delta \int_0^{\frac{m}{\cos\delta}} \frac{u\,du}{(\sqrt{u^2+h^2})^{2k-1}}$$

Die Integration nach u ergiebt:

$$-\frac{1}{2k-3} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta}+h^2}\right)^{2k-3}} + \frac{1}{2k-3} \cdot \frac{1}{h^{2k-3}}$$

und man erhält:

$$(2)\; u_1 = -\frac{1}{2k-3}\int_0^{\delta_1} \frac{d\delta}{\left(\sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta}+h^2}\right)^{2k-3}} + \frac{1}{2k-3}\int_0^{\delta_1} \frac{d\delta}{h^{2k-3}}$$

Für das letztere Integral erhält man

$$\frac{1}{2k-3}\cdot\frac{\delta'}{h^{2k-3}}$$

und es bleibt zu berechnen

$$\int_0^{\delta_1} \frac{d\delta}{\left(\sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta}+h^2}\right)^{2k-3}}.$$

Zur Ausführung dieses Integrals wenden wir dieselbe Substitution an wie in § 2 und setzen

$$\frac{m^2}{\cos^2\delta}+h^2 = r^2.$$

Beachtet man zugleich die geometrische Bedeutung von r, so sieht man ein, dass diese Grösse der zwischen den Grenzen l und r_1 variablen Verbindungslinie von P mit einem beliebigen Punkte der Strecke $\overline{CA}$ entspricht. Durch die Substitution erhält man

$$m\int_l^{r_1} \frac{dr}{r^{2k-4}(r^2-h^2)\sqrt{r^2-l^2}}$$

wenn noch $h^2+m^2=l^2$ gesetzt wird. Dieses Integral bringen wir in die Form

$$\frac{m}{2}\int_l^{r_1} \frac{d(r^2)}{r^{2k-2}(r^2-h^2)\cdot\frac{\sqrt{r^2-l^2}}{r}}$$

und substituiren jetzt

$$\frac{\sqrt{r^2 - l^2}}{r} = x \cdot$$

Mit Weglassung des Coefficienten m erhalten wir dadurch das neue Integral

$$\frac{1}{l^{2k-4}} \int \frac{dx}{m^2 + h^2 x^2} \cdot (1 - x^2)^{k-2}$$

Addirt man jetzt im Nenner $+1-1$, dividirt und multiplicirt denselben mit h^2, ersteres unter letzteres vor dem Integralzeichen, wechselt dann noch im Nenner und vor dem Integralzeichen das Vorzeichen, so erhält man das umgeformte Integral

$$-\frac{1}{h^2 l^{2k-4}} \cdot \int \frac{(1-x^2)^{k-2}}{1 - x^2 - \left(\frac{l}{h}\right)^2} dx \cdot$$

Dividirt man mit dem Nenner des unter dem Integralzeichen stehenden Bruches in den Zähler, so findet man für dieses Integral folgende Summe:

$$-\frac{1}{h^2 l^{2k-4}} \int \left(1 - x^2\right)^{k-3} dx - \frac{1}{h^4 l^{2k-6}} \int \left(1 - x^2\right)^{k-4} dx - \ldots .$$

$$- \frac{1}{h^{2k-4} l^2} \int dx - \frac{1}{h^{2k-2}} \int \frac{dx}{1 - x^2 - \left(\frac{l}{h}\right)^2}$$

Das letzte von diesen Integralen ergiebt einschliesslich seines Vorzeichens

$$\frac{1}{h^{2k-2}} \cdot \frac{h}{m} \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{m} x =$$

$$\frac{1}{h^{2k-2}} \cdot \frac{h}{m} \operatorname{arc\,tg} \frac{h\sqrt{r^2 - l^2}}{m \cdot r} \cdot$$

Wir lassen es vorerst unberücksichtigt.

In den übrigen Integralen setzen wir

$$x = \cos \alpha$$

und erhalten für dieselben folgende Summe:

$$\frac{1}{h^2 l^{2k-4}} \int \sin^{2k-5}\alpha \, d\alpha + \frac{1}{h^4 l^{2k-6}} \int \sin^{2k-7}\alpha \, d\alpha + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{h^{2k-4} l^2} \int \sin\alpha \, d\alpha$$

Es ist nun allgemein für ein ungerades n

$$\int \sin^n \alpha \, d\alpha = -\frac{\cos\alpha}{n} \left\{ \sin^{n-1}\alpha + \frac{n-1}{n-2} \sin^{n-3}\alpha + \ldots\ldots\ldots \right.$$

$$\left. + \frac{n-1 \,.\, n-3 \ldots 4 \,.\, 2}{n-2 \,.\, n-4 \ldots 3 \,.\, 1} \right\}$$

Bestimmen wir mittelst dieser Formel die Integrale obiger Summe, so erhalten wir für dieselbe die Summe folgender Glieder:

$$-\frac{\cos\alpha}{2k-5} \cdot \frac{1}{h^2 l^{2k-4}} \left\{ \sin^{2k-6}\alpha + \frac{2k-6}{2k-7} \sin^{2k-8}\alpha + \ldots\ldots\ldots \right.$$

$$\left. + \frac{2k-6 \,.\, 2k-8 \ldots 4 \,.\, 2}{2k-7 \,.\, 2k-9 \ldots 3 \,.\, 1} \right\}$$

$$-\frac{\cos\alpha}{2k-7} \cdot \frac{1}{h^4 l^{2k-6}} \left\{ \sin^{2k-8}\alpha + \frac{2k-8}{2k-9} \sin^{2k-10}\alpha + \ldots\ldots\ldots \right.$$

$$\left. + \frac{2k-8 \,.\, 2k-10 \ldots 4 \,.\, 2}{2k-9 \,.\, 2k-11 \ldots 3 \,.\, 1} \right\}$$

$$-\frac{\cos\alpha}{2k-9} \cdot \frac{1}{h^6 l^{2k-8}} \left\{ \sin^{2k-10}\alpha + \frac{2k-10}{2k-11} \sin^{2k-12}\alpha + \ldots\ldots\ldots \right.$$

$$\left. + \frac{2k-10 \,.\, 2k-12 \ldots 4 \,.\, 2}{2k-11 \,.\, 2k-13 \ldots 3 \,.\, 1} \right\}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$-\frac{\cos\alpha}{1} \cdot \frac{1}{h^{2k-4} l^2}$$

Durch Restitution von

$$\sin\alpha = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \frac{r^2 - l^2}{r^2}} = \frac{l}{r}$$

und

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{r^2 - l^2}}{r}$$

folgt für diese Summe:

$$-\frac{1}{2k-5}\cdot\frac{\sqrt{r^2-l^2}}{r}\cdot\frac{1}{h^2\,l^{2k-4}}\left\{\left(\frac{l}{r}\right)^{2k-6}+\frac{2k-6}{2k-7}\left(\frac{l}{r}\right)^{2k-8}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{2k-6\,.\,2k-8\ldots4\,.\,2}{2k-7\,.\,2k-9\ldots3\,.\,1}\right\}$$

$$-\frac{1}{2k-7}\cdot\frac{\sqrt{r^2-l^2}}{r}\cdot\frac{1}{h^4\,l^{2k-6}}\left\{\left(\frac{l}{r}\right)^{2k-8}+\frac{2k-8}{2k-9}\left(\frac{l}{r}\right)^{2k-10}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{2k-8\,.\,2k-10\ldots4\,.\,2}{2k-9\,.\,2k-11\ldots3\,.\,1}\right\}$$

$$-\frac{1}{2k-9}\cdot\frac{\sqrt{r^2-l^2}}{r}\cdot\frac{1}{h^6\,l^{2k-8}}\left\{\left(\frac{l}{r}\right)^{2k-10}+\frac{2k-10}{2k-11}\left(\frac{l}{r}\right)^{2k-12}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{2k-10\,.\,2k-12\ldots4\,.\,2}{2k-11\,.\,2k-13\ldots3\,.\,1}\right\}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$-\frac{\sqrt{r^2-l^2}}{r}\cdot\frac{1}{h^{2k-4}\,l^2}$$

Das erste Glied dieser Summe multipliziren wir nun im Zähler und Nenner mit h^{2k-4}, das zweite mit h^{2k-6} u. s. w., schliesslich das letzte mit h^2 und ordnen so an, dass wir erst die letzten Glieder der einzelnen Reihen, dann die vorletzten u. s. w. zusammenfassen. Setzen wir $\cos\eta$ für $\frac{h}{l}$, so erhalten wir folgende Summe:

$$-\frac{\sqrt{r^2-l^2}}{r}\cdot\frac{1}{h^{2k-2}}\left\{\cos^2\eta+\frac{2}{3}\cos^4\eta+\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\cos^6\eta+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{2\,.\,4\,.\,\ldots\,.\,2k-6}{3\,.\,5\,.\,\ldots\,.\,2k-5}\cos^{2k-4}\eta\right\}$$

$$-\frac{\sqrt{r^2-l^2}}{3r^3}\cdot\frac{1}{h^{2k-4}}\left\{\cos^2\eta+\frac{4}{5}\cos^4\eta+\frac{4\,.\,6}{5\,.\,7}\cos^6\eta+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{4\,.\,6\,.\,\ldots\,.\,2k-6}{5\,.\,7\,.\,\ldots\,.\,2k-5}\cos^{2k-6}\eta\right\}$$

$$-\frac{\sqrt{r^2-l^2}}{5r^5}\cdot\frac{1}{h^{2k-6}}\left\{\cos^2\eta+\frac{6}{7}\cos^4\eta+\frac{6\,.\,8}{7\,.\,9}\cos^6\eta+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{6\,.\,8\,.\,\ldots\,.\,2k-6}{7\,.\,9\,.\,\ldots\,.\,2k-5}\cos^{2k-8}\eta\right\}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$-\frac{\sqrt{r^2-l^2}}{2k-5\,.\,r^{2k-5}}\cdot\frac{1}{h^4}\cdot\left\{\cos^2\eta\right\}$$

Es werde nun die Summe der in dem ersten Gliede erhaltenen Reihe mit

$$\Sigma = A$$

bezeichnet, die Summe derjenigen im zweiten Gliede mit Σ_1 und analog die Folgenden, so dass schliesslich der in der Klammer des letzten Gliedes stehende Werth durch Σ_{k-3} dargestellt wird, so folgt

$$\Sigma_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\eta}(A-\cos^2\eta)$$

$$\Sigma_2 = \frac{3\,.\,5}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{\cos^4\eta}\left(A-\cos^2\eta-\frac{2}{3}\cos^4\eta\right)$$

u. s. w., zuletzt

$$\Sigma_{k-3} = \frac{3\,.\,5\,.\,\ldots\,.\,2k-5}{2\,.\,4\,.\,\ldots\,.\,2k-6}\cdot\frac{1}{\cos^{2k-6}\eta}\left\{A-\cos^2\eta-\frac{2}{3}\cos^4\eta-\ldots\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{2\,.\,4\,.\,\ldots\,.\,2k-6}{3\,.\,5\,.\,\ldots\,.\,2k-5}\cos^{2k-6}\eta\right\}$$

Die Berechnung von $\Sigma_1\ \Sigma_2\ldots.\Sigma_{k-3}$ erfordert also nur die Kenntniss der Glieder der ersten Reihe, deren Summe wir mit A bezeichnet haben. Bezeichnen wir nun mit A_1 den Werth von A vermindert um sein erstes Glied, mit A_2 denselben vermindert um die Summe der beiden ersten Glieder u. s. w., mit A_{k-3} schliesslich denselben, vermindert um die Summe der $k-3$ ersten Glieder, d. i. das letzte Glied von A, so ist

$$\Sigma_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\eta}\cdot A_1$$

$$\Sigma_2 = \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{1}{\cos^4 \eta} \cdot A_2$$

u. s. w., zuletzt

$$\Sigma_{k-3} = \frac{3.5 \ldots . 2k-5}{2.4 \ldots . 2k-6} \cdot \frac{1}{\cos^{2k-6} \eta} A_{k-3}$$

Durch diese abgekürzten Bezeichnungen lässt sich nun obige Summe folgendermassen schreiben:

$$-\frac{1}{h^{2k-2}} \cdot \frac{\sqrt{r^2-l^2}}{r} A - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \eta} \cdot \frac{1}{h^{2k-4}} \cdot \frac{\sqrt{r^2-l^2}}{r^3} A_1 - \ldots\ldots$$
$$- \frac{1.3 \ldots . 2k-7}{2.4 \ldots . 2k-6} \cdot \frac{1}{\cos^{2k-6} \eta} \cdot \frac{1}{h^4} \cdot \frac{\sqrt{r^2-l^2}}{r^{2k-5}} A_{k-3}$$

Ersetzen wir $\cos \eta$ wieder durch $\frac{h}{l}$, so folgt hierfür

$$-\frac{1}{h^{2k-2}} \cdot \frac{\sqrt{r^2-l^2}}{r} \left\{ A + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r}\right)^2 A_1 + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{l}{r}\right)^4 A_2 + \ldots . \right.$$
$$\left. + \frac{1.3 \ldots . 2k-7}{2.4 \ldots . 2k-6} \left(\frac{l}{r}\right)^{2k-6} A_{k-3} \right\}$$

Hierzu ist noch zu addiren

$$\frac{1}{h^{2k-2}} \cdot \frac{h}{m} \operatorname{arc\,tg} \frac{h\sqrt{r^2-l^2}}{mr}$$

und dann in die Summe die Grenzen l und r_1 einzusetzen, was einfach durch einen r anzufügenden Index bemerklich gemacht wird, da für $r=l$ sämmtliche Glieder verschwinden. Das Resultat ist dann noch mit m zu multipliziren. Setzen wir $\frac{l}{r_1} = \sin \varphi$ und $\sqrt{r_1^2 - l^2} = s_1$, so erhalten wir

$$\frac{m}{h^{2k-2}} \left\{ \frac{h}{m} \operatorname{arc\,tg} \frac{hs_1}{mr_1} - \frac{s_1}{r_1} \left(A + \frac{1}{2} A_1 \sin^2 \varphi + \frac{1.3}{2.4} A_2 \sin^4 \varphi \right. \right.$$
$$\left. \left. + \ldots . + \frac{1.3 \ldots . 2k-7}{2.4 \ldots . 2k-6} A_{k-3} \sin^{2k-6} \varphi \right) \right\}$$

Dieses ist das Resultat für

$$\int_0^{\delta_1} \frac{d\delta}{\left(\sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta} + h^2}\right)^{2k-3}}$$

Um nun aus (2) den Werth für u_1 zu erhalten, ist dieses Resultat noch mit $-\frac{1}{2k-3}$ zu multipliziren und um

$$\frac{1}{2k-3} \cdot \frac{\delta'}{h^{2k-3}}$$

zu vermehren. Man erhält:

$$(3)\quad u_1 = \frac{1}{2k-3} \cdot \frac{\delta'}{h^{2k-3}} - \frac{m}{2k-3.h^{2k-2}} \left\{ \frac{h}{m} arctg \frac{hs_1}{mr_1} - \frac{s_1}{r_1} \left(A + \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{1}{2} A_1 \sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4} A_2 \sin^4\varphi + \ldots + \frac{1.3\ldots.2k-7}{2.4\ldots.2k-6} A_{k-3} \sin^{2k-6}\varphi \right) \right\}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$M = A + \frac{1}{2} A_1 \sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4} A_2 \sin^4\varphi + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1.3\ldots.2k-7}{2.4\ldots.2k-6} A_{k-3} \sin^{2k-6}\varphi$$

so folgt

$$u_1 = \frac{1}{2k-3} \cdot \frac{\delta'}{h^{2k-3}} - \frac{m}{2k-3.h^{2k-2}} \left\{ \frac{h}{m} arctg \frac{hs_1}{mr_1} - \frac{s_1}{r_1} M \right\}$$

Dieses ist der Werth der Kräftefunktion für das rechtwinklige Dreieck AOC. Ganz ebenso findet man die Kräftefunktion für das rechtwinklige Dreieck BOC. Bezeichnet man dieselbe mit u_2 und setzt man

$$N = A + \frac{1}{2} A_1 \sin^2\psi + \frac{1.3}{2.4} A_2 \sin^4\psi + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1.3\ldots.2k-7}{2.4\ldots.2k-6} A_{k-3} \sin^{2k-6}\psi$$

so erhält man:

$$u_2 = \frac{1}{2k-3} \cdot \frac{\delta''}{h^{2k-3}} - \frac{m}{2k-3.h^{2k-2}} \left\{ \frac{h}{m} \operatorname{arctg} \frac{hs_2}{mr_2} - \frac{s_2}{r_2} N \right\}$$

Unter der Voraussetzung, dass s_1 oder s_2 negativ zu nehmen sind, wenn sie ganz ausserhalb der Strecke $\overline{AC}$ liegen, findet man nun die Kräftefunktion des Dreiecks ABO durch Addition von u_1 und u_2. Es ergiebt sich also für die letztere, wenn sie mit u und der Winkel AOB wieder mit α bezeichnet werde:

$$(4) \quad u = \frac{1}{2k-3} \cdot \frac{\alpha}{h^{2k-3}} - \frac{m}{2k-3.h^{2k-2}} \left\{ \frac{h}{m} \left(\operatorname{arctg} \frac{hs_1}{mr_1} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \operatorname{arctg} \frac{hs_2}{mr_2} \right) - \frac{s_1}{r_1} M - \frac{s_2}{r_2} N \right\}$$

Es handelte sich nun, wie wir in § 3 gesehen haben, um die Bestimmung der Kräftefunktion Q eines Begrenzungspolygons. Um diesen Werth zu finden haben wir nur noch die Summe der Kräftefunktionen u zu bilden und erhalten demnach:

$$(5) \quad Q = \frac{2\pi\varepsilon}{2k-3 \,.\, h^{2k-3}} - \frac{m}{2k-3 \,.\, h^{2k-2}} \sum \left\{ \frac{h}{m} \left(\operatorname{arctg} \frac{hs_1}{mr_1} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \operatorname{arctg} \frac{hs_2}{mr_2} \right) - \frac{s_1}{r_1} M - \frac{s_2}{r_2} N \right\}$$

wo ε wieder den Werth $+1$ oder 0 darstellt, je nachdem der Fusspunkt O der von P auf die Ebene des Polygons gefällten Normalen innerhalb oder ausserhalb des Polygons liegt.

Da die Kräftefunktion des gesammten Polyeders durch

$$U = \frac{-1}{n-1 \,.\, n-4} \Sigma h Q$$

dargestellt wird, so ergiebt sich schliesslich als Endresultat für die vorliegende Untersuchung, nachdem wieder für $2k$ die Grösse n eingeführt worden ist, der folgende Ausdruck:

$$(6) \quad U = \frac{-1}{n-1 \,.\, n-3 \,.\, n-4} \sum \left[\frac{2\pi\varepsilon}{h^{n-4}} - \right.$$
$$\left. \frac{m}{h^{n-3}} \sum \left\{ \frac{h}{m} \left(\operatorname{arctg} \frac{hs_1}{mr_1} + \operatorname{arctg} \frac{hs_2}{mr_2} \right) - \frac{s_1}{r_1} M - \frac{s_2}{r_2} N \right\} \right]$$

Das vorliegende Resultat ist jedoch, wie wir sahen, für $n=4$ nicht brauchbar, was auch zugleich aus der Beschaffenheit der Grössen $AA_1\ldots.$ folgt, welche nur für $n\geqq 6$ einen Sinn haben.

Es ist noch zu bemerken, dass, wenn der Punkt P in der Ebene eines der Begrenzungspolygone des Polyeders liegt, der Werth Q desselben und damit derjenige Theil von U, welcher von diesem Begrenzungspolygon herrührt, in unbestimmter Form erscheint. Es muss deshalb das betreffende Glied aus der Summe, die wir für U erhalten haben, ausgeschieden und gesondert durch eine direkte Berechnung gefunden werden, durch welche jene unbestimmte Form vermieden wird.

Eine Vereinfachung des Resultats lässt sich auch hier, analog dem Falle $n=2$, erreichen durch Einführen der Grösse F, welche den Flächeninhalt des sphärischen Polygons bedeutet, das durch eine mit dem Radius 1 um P beschriebene Kugel aus der Pyramide ausgeschnitten wird, deren Basis ein Begrenzungspolygon und deren Scheitelpunkt P ist. Es ist nemlich

$$2\pi\varepsilon - \sum\left(arctg\,\frac{hs_1}{mr_1} + artg\,\frac{hs_2}{mr_2}\right) = F$$

Man erhält dadurch

$$(7)\quad U = \frac{-1}{n-1.n-3.n-4}\sum\frac{1}{h^{n-4}}\left\{F + \sum\frac{m}{h}\left(\frac{s_1}{r_1}M + \frac{s_2}{r_2}N\right)\right\}$$

Die erhaltenen Resultate fassen wir folgendermassen zusammen:

Ist die Elementaranziehung umgekehrt proportional einer geraden Potenz der Entfernung grösser als die vierte, setzt man

$$A = cos^2\eta + \frac{2}{3}cos^4\eta + \frac{2.4}{3.5}cos^6\eta + \ldots. \frac{2.4\ldots n-6}{3.5\ldots n-5}cos^{n-4}\eta$$

A_1 gleich dieser Summe vermindert um ihr erstes Glied, A_2 gleich derselben vermindert um die beiden

ersten Glieder, allgemein A_x gleich derselben vermindert um die Summe der x ersten Glieder, bedeuten ferner M und N bezüglich die Grössen

$$A + \frac{1}{2} A_1 \sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4} A_2 \sin^4\varphi + \ldots . \frac{1.3 \ldots n-7}{2.4 \ldots n-6} A_{\frac{n}{2}-3} \sin^{n-6}\eta$$

$$A + \frac{1}{2} A_1 \sin^2\psi + \frac{1.3}{2.4} A_2 \sin^4\psi + \ldots . \frac{1.3 \ldots n-7}{2.4 \ldots n-6} A_{\frac{n}{2}-3} \sin^{n-6}\psi$$

so wird die Kräftefunktion eines homogenen Polyeders auf einen äusseren Punkt dargestellt durch die in (6) und (7) gegebenen Werthe.

Beispiel: Es sei $n = 6$:

Man erhält

$$A = \cos^2\eta$$

während die Grössen $A_1\ A_2 \ldots .$ sämmtlich verschwinden. Somit ist

$$M = N = \cos^2\eta = \left(\frac{h}{l}\right)^2$$

und man erhält als Resultat für den vorliegenden Fall:

$$U = -\frac{1}{30} \sum \frac{1}{h^2} \left\{ F + \sum \frac{mh}{l^2} \left(\frac{s_1}{r_1} + \frac{s_2}{r_2} \right) \right\}.$$

---

§ 5.

$n = 2k + 1$

Ist n ungerade und wird es gleich $2k+1$ gesetzt, so ist für das rechtwinklige Dreieck ACO zu berechnen:

$$(1) \qquad u_1 = \int_0^{\delta_1} d\delta \int_0^{\frac{m}{\cos\delta}} \frac{u\,du}{(u^2 + h^2)^k}$$

Die Integration nach u ergibt:

$$\frac{1}{2k-2} \left\{ - \frac{1}{\left(\frac{m^2}{\cos^2\delta} + h^2 \right)^{k-1}} + \frac{1}{h^{2k-2}} \right\}$$

Es folgt somit

$$u_1 = -\frac{1}{2k-2}\int_0^{\delta_1} \frac{d\delta}{\left(\frac{m^2}{\cos^2\delta} + h^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{2k-2}\int_0^{\delta_1} \frac{d\delta}{h^{2k-2}}$$

Für das letztere Glied erhält man:

$$\frac{1}{2k-2} \cdot \frac{\delta'}{h^{2k-2}}$$

und es bleibt noch zu bestimmen

$$\int_0^{\delta_1} \frac{d\delta}{\left(\frac{m^2}{\cos^2\delta} + h^2\right)^{k-2}}.$$

Wenden wir auch hier wieder die Substitution

$$\frac{m^2}{\cos^2\delta} + h^2 = r^2$$

an, so ergiebt sich das umgeformte Integral

$$m\int_l^{r_1} \frac{dr}{r^{2k-3}(r^2-h^2)\sqrt{r^2-l^2}}.$$

und durch fernere Substitution von

$$\sqrt{r^2-l^2} = s,$$

wo s die von 0 bis s_1 variabele Strecke CA bedeutet, das andere

$$m\int_0^{s_1} \frac{ds}{(s^2+m^2)(s^2+l^2)^{k-1}}$$

Das vorliegende Integral enthält eine rationale Funktion der Variablen s und lässt sich auf einfache Weise durch Partialbruchzerlegung lösen.

Man setze:

$$\frac{1}{(s^2+m^2)(s^2+l^2)^{k-1}} = \frac{c_1}{s^2+l^2} + \frac{c_2}{(s^2+l^2)^2} + \cdots \frac{c_{k-1}}{(s^2+l^2)^{k-1}} + \\ + \frac{d}{s^2+m^2},$$

und wird leicht für die Zähler der Partialbrüche die folgenden Werthe erhalten:

$$c_1 = -\frac{1}{h^{2k-2}}$$

$$c_2 = -\frac{1}{h^{2k-4}}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$c_{k-1} = -\frac{1}{h^2}$$

$$d = \frac{1}{h^{2k-2}}$$

Unter Weglassung des Coefficienten m erhalten wir jetzt für unser Integral die folgende Summe:

$$\frac{1}{h^{2k-2}}\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^2+m^2} - \frac{1}{h^{2k-2}}\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^2+l^2} - \frac{1}{h^{2k-4}}\int_0^{s_1}\frac{ds}{(s^2+l^2)^2} -$$

$$\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{h^2}\int_0^{s_1}\frac{ds}{(s^2+l^2)^{k-1}}$$

Die beiden ersten Integrale dieser Summe lassen sich sogleich bestimmen. Auf die anderen wenden wir die folgende Recursionsformel an:

$$\int\frac{ds}{(s^2+l^2)^{k-1}} = \frac{1}{2k.l^2}\cdot\frac{s}{(s^2+l^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{1}{l^2}\int\frac{ds}{(s^2+l^2)^k},$$

welche leicht durch Differentiation von

$$\frac{s}{(s^2+l^2)^k}$$

nach s gefunden wird.

Man erhält für die unbestimmten Integrale folgende Werthe:

$$\int \frac{ds}{(s^2+l^2)^2} = \frac{1}{2l^2}\cdot\frac{s}{(s^2+l^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l^2}\int \frac{ds}{s^2+l^2}$$

$$\int \frac{ds}{(s^2+l^2)^3} = \frac{1}{4l^2}\cdot\frac{s}{(s^2+l^2)^2} + \frac{3}{4.2}\cdot\frac{1}{l^4}\cdot\frac{s}{s^2+l^2} + \\ + \frac{3}{4.2}\cdot\frac{1}{l^4}\int \frac{ds}{s^2+l^2}$$

$$\int \frac{ds}{(s^2+l^2)^4} = \frac{1}{6l^2}\cdot\frac{s}{(s^2+l^2)^3} + \frac{5}{6.4}\cdot\frac{1}{l^4}\cdot\frac{s}{(s^2+l^2)^2} \\ + \frac{5.3}{6.4.2}\cdot\frac{1}{l^6}\cdot\frac{s}{s^2+l^2} + \frac{5.3}{6.4.2}\cdot\frac{1}{l^6}\int \frac{ds}{s^2+l^2}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\int \frac{ds}{(s^2+l^2)^{k-1}} = \frac{1}{2k-4.l^2}\cdot\frac{s}{(s^2+l^2)^{k-2}} \\ + \frac{2k-5}{2k-4.2k-6}\cdot\frac{1}{l^4}\frac{s}{(s^2+l^2)^{k-3}} + \ldots\ldots \\ + \frac{2k-5.2k-7\ldots3}{2k-4.2k-6\ldots4.2}\cdot\frac{1}{l^{2k-4}}\cdot\frac{s}{s^2+l^2} \\ + \frac{2k-5.2k-7\ldots3}{2k-4.2k-6\ldots4.2}\cdot\frac{1}{l^{2k-4}}\int \frac{ds}{s^2+l^2}$$

Diese Werthe führen wir in obige Summe ein, und vereinigen dabei alle Glieder, welche $\int \frac{ds}{s^2+l^2}$, und alle diejenigen, welche gleiche Potenzen von s^2+l^2 im Nenner enthalten. Setzen wir noch die Grenzen 0 und s_1 ein, was wieder einfach durch einen s und r anzufügenden Index bemerklich gemacht wird und führen schliesslich noch $\cos\eta$ für $\frac{h}{l}$ ein, so entsteht aus jener die folgende Summe:

$$+\frac{1}{h^{2k-2}}\cdot\frac{1}{m}\,arctg\,\frac{s_1}{m}$$

$$-\frac{1}{h^{2k-2}}\cdot\frac{1}{l}\,arctg\,\frac{s_1}{l}\Big\{1+\frac{1}{2}\cos^2\eta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cos^4\eta+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1\cdot3\ldots2k-5}{2\cdot4\ldots2k-4}\cos^{2k-4}\eta\Big\}$$

$$-\frac{1}{h^{2k-2}}\cdot\frac{s_1}{r_1^2}\Big\{\frac{1}{2}\cos^2\eta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cos^4\eta+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1\cdot3\ldots2k-5}{2\cdot4\ldots2k-4}\cos^{2k-4}\eta\Big\}$$

$$-\frac{1}{h^{2k-4}}\cdot\frac{s_1}{r_1^4}\Big\{\frac{1}{4}\cos^2\eta+\frac{1\cdot5}{4\cdot6}\cos^4\eta+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1\cdot5\ldots2k-5}{4\cdot6\ldots2k-4}\cos^{2k-6}\eta\Big\}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$-\frac{1}{h^4}\cdot\frac{s_1}{r_1^{2k-4}}\Big\{\frac{1}{2k-4}\cos^2\eta\Big\}$$

Von den hier vorkommenden Reihen wollen wir die Summe der ersten mit

$$\Sigma = B$$

bezeichnen. Es folgt dann für die Summe der zweiten:

$$\Sigma_1 = B-1 = B_1$$

für die der dritten:

$$\Sigma_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2\eta}\Big\{B-1-\cos^2\eta\Big\}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2\eta}\cdot B_2$$

für die der vierten:

$$\Sigma_3 = \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{1}{\cos^4\eta}\Big\{B-1-\frac{1}{2}\cos^2\eta-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cos^4\eta\Big\}$$

$$= \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\frac{1}{\cos^4\eta}B_3$$

u. s. w. und schliesslich für die der letzten

$$\Sigma_{k-2} = \frac{2.4\ldots 2k-6}{3.5\ldots 2k-5} \cdot \frac{1}{cos^{2k-6}\eta} \cdot B_{k-2}$$

Hier bedeutet allgemein B_x die Summe B der ersten Reihe vermindert um die Summe der x ersten Glieder.

Die obige Summe können wir jetzt folgendermassen schreiben:

$$\frac{1}{h^{2k-2}} \cdot \frac{1}{m} arc\,tg \frac{s_1}{m} - \frac{1}{h^{2k-2}} \cdot \frac{1}{l} arc\,tg \frac{s_1}{l} . B - \frac{1}{h^{2k-2}} \cdot \frac{s_1}{r_1^2} . B_1$$
$$- \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{h^{2k-4}} \cdot \frac{s_1}{r_1^4} \cdot \frac{B_2}{cos^2\eta} \ldots\ldots - \frac{2.4\ldots 2k-6}{3.5\ldots 2k-5} \cdot \frac{1}{h^4} \cdot \frac{s_1}{r_1^{2k-4}} \cdot \frac{B_{k-2}}{cos^{2k-6}\eta}$$

Setzen wir wieder $cos\,\eta = \frac{h}{l}$ dagegen $\frac{l}{r_1} = sin\,\varphi$, so folgt hierfür:

$$\frac{1}{h^{2k-2}} \left\{ \frac{1}{m} arc\,tg \frac{s_1}{m} - \frac{1}{l} arc\,tg \frac{s_1}{l} B - \frac{s_1}{r_1^2} \left(B_1 + \frac{2}{3} sin^2\varphi\, B_2 \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2.4}{3.5} sin^4\varphi\, B_3 + \ldots + \frac{2.4\ldots 2k-6}{3.5\ldots 2k-5} sin^{2k-6}\varphi\, B_{k-2} \right) \right\}$$

Dieses Resultat ist noch mit m zu multipliciren. Um dann aus (2) den Werth für u_1 zu finden, ist abermals noch mit

$$- \frac{1}{2k-2}$$

zu multipliciren und

$$\frac{1}{2k-2} \cdot \frac{\delta'}{h^{2k-2}}$$

hinzuzufügen.

Es ergiebt sich:

$$u_1 = \frac{1}{2k-2} \cdot \frac{\delta'}{h^{2k-2}} - \frac{1}{2k-2.h^{2k-2}} arc\,tg \frac{s_1}{m}$$
$$+ \frac{m}{2k-2\,.\,h^{2k-2}} \left\{ \frac{B}{l} arc\,tg \frac{s_1}{l} + \frac{s_1}{r_1^2} M_1 \right\}$$

wenn zur Abkürzung

$$M_1 = B_1 + \frac{2}{3} sin^2\varphi\,.\,B_2 + \ldots \frac{2.4\ldots 2k-6}{3.5\ldots 2k-5} sin^{2k-6}\varphi\, B_{k-2}$$

gesetzt wird.

Nun bedeutet aber $arctg \frac{s_1}{m}$ den Winkel δ', die beiden ersten Glieder in u_1 heben sich also auf, und man hat:

$$(3) \qquad u_1 = \frac{m}{2k-2 \,.\, h^{2k-2}} \left\{ \frac{B}{l} arctg \frac{s_1}{l} + \frac{s_1}{r_1^2} M_1 \right\}$$

Setzt man ferner

$$N_1 = B_1 + \frac{2}{3} sin^2 \psi B_2 + \ldots . \frac{2.4 \ldots 2k-6}{3.5 \ldots 2k-5} sin^{2k-6} \psi B_{k-2},$$

so erhält man ebenso für die Kräftefunktion des rechtwinkligen Dreiecks BCO:

$$(4) \qquad u_2 = \frac{m}{2k-2 \,.\, h^{2k-2}} \left\{ \frac{B}{l} arctg \frac{s_2}{l} + \frac{s_2}{r_2^2} N_1 \right\}.$$

Setzt man wieder fest, dass s_1 oder s_2 negativ zu nehmen ist, wenn es ganz ausserhalb der Strecke AC liegt, so findet man die Kräftefunktion für das Dreieck ABO durch Addition von u_1 und u_2. Man erhält:

$$(5) \; u = \frac{m}{2k-2 \,.\, h^{2k-2}} \left\{ \frac{B}{l} \left(arctg \frac{s_1}{l} + arctg \frac{s_2}{l} \right) + \frac{s_1}{r_1^2} M_1 + \frac{s_2}{r_2^2} N_1 \right\}$$

Hieraus findet man den Werth

$$Q = \int \frac{dw}{r^{n-1}}$$

durch Summirung der Kräftefunktionen aller der Dreiecke aus denen das in Betracht gezogene Polygon besteht.

Es wird:

$$Q = \frac{1}{2k-2 \,.\, h^{2k-2}} \sum m \left\{ \frac{B}{l} \left(arctg \frac{s_1}{l} + arctg \frac{s_2}{l} \right) + \frac{s_1}{r_2^2} M_1 + \frac{s_2}{r_2^2} N_1 \right\}$$

Nachdem wir nun Q berechnet haben, finden wir die Kräftefunktion des Polyeders aus der Gleichung (1) in § 3:

$$U = \frac{-1}{n-1 \,.\, n-4} \Sigma h Q \,.$$

Führen wir für $2k+1$ wieder n ein und bemerken noch, dass $arctg \frac{s_1}{l} + arctg \frac{s_2}{l}$ den Winkel APB darstellt, den wir mit β bezeichnen wollen, so erhalten wir folgendes Endresultat:

$$(7)\quad U=\frac{-1}{n-1\,.\,n-3\,.\,n-4}\sum\frac{1}{h^{n-4}}\sum m\frac{B}{l}\left\{\beta+\frac{s_1}{r_1^{\,2}}M_1+\frac{s_2}{r_2^{\,2}}N_1\right\}$$

Wir sahen schon früher, dass dieses Relultat für den Fall $n=1$ nicht brauchbar ist. Ebensowenig ist es anwendbar auf den Fall $n=3$. Würde in der That die Elementaranziehung umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung sein, so wäre für das Dreieck ACO zu berechnen:

$$u_1=\int_0^{\delta_1}\int_0^{\frac{m}{\cos\delta}}\frac{udu}{u^2+h^2}$$

und da die Integration nach u das Resultat

$$l\,.\,\frac{\sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta}+h^2}}{h}$$

ergiebt, so bleibt noch ein Integral

$$\int_0^{\delta_1} l\,.\,\sqrt{\frac{m^2}{\cos^2\delta}+h^2}\,.\,d\delta$$

aufzulösen. Auch die Bildung der Grössen $B\,B_1\ldots$ schliesst den Fall $n=3$ aus.

Das Resultat der vorliegenden Entwicklungen fassen wir folgendermassen zusammen:

Ist die Elementaranziehung umgekehrt proportional einer ungeraden Potenz der Entfernung, grösser als die dritte, setzt man

$$B=1+\frac{1}{2}\cos^2\eta+\ldots\ldots\frac{1\,.\,3\ldots n-6}{2\,.\,4\ldots n-5}\cos^{n-5}\eta$$

B_1 gleich dieser Summe vermindert um ihr erstes Glied, B_2 gleich derselben vermindert um die beiden ersten Glieder, allgemein B_x gleich derselben vermindert um die Summe der x ersten Glieder, bedeuten ferner M_1 und N_1 bezüglich die Grössen

$$B_1+\frac{2}{3}\sin^2\varphi\, B_2+\ldots\ldots\frac{2\cdot4\ldots n-7}{3\cdot5\ldots n-6}\sin^{n-7}\varphi\, B_{\frac{n-5}{2}}$$

$$B_1+\frac{2}{3}\sin^2\psi\, B_2+\ldots\ldots\frac{2\cdot4\ldots n-7}{3\cdot5\ldots n-6}\sin^{n-7}\psi\, B_{\frac{n-5}{2}}$$

so wird die Kräftefunktion eines homogenen Polyeders auf einen äusseren Punkt durch den in (7) gegebenen Ausdruck dargestellt.

Beispiel. Es sei $n=5$

Man erhält

$$B=1,$$

alle andern B werden gleich 0. Somit ist

$$M_1=N_1=0$$

und das einfache Resultat lautet:

$$U=-\frac{1}{8}\sum\frac{1}{h}\sum\frac{m}{l}\cdot\beta$$

§ 6.

Die in den §§ 3, 4 und 5 enthaltenen Entwicklungen finden Bestätigung durch eine Beziehung, die sich für das Integral (2) in § 3:

$$u_1=\int_0^{\delta_1}d\delta\int_0^{\frac{m}{\cos\delta}}\frac{udu}{(\sqrt{u^2+h^2})^{n-1}}$$

aufstellen lässt.

Bezeichnet man nemlich den Werth desselben, wenn die Elementaranziehung umgekehrt der n. Potenz geschieht mit u_n, so hat man für ein um 2 grösseres n:

$$u_{n+2}=\int_0^{\delta_1}d\delta\int_0^{\frac{m}{\cos\delta}}\frac{udu}{(\sqrt{u^2+h^2})^{n+1}}$$

und findet leicht:

$$u_{n+2} = -\frac{2}{n-1} \cdot \frac{du_n}{dh^2}.$$

Wenn also für irgend einen bestimmten Fall der Anziehung, etwa für den Fall $n=5$ die Kräftefunktion u_5 des Dreiecks AOC bekannt ist, so lässt sich hieraus durch Differentiation nach h^2 und Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$ der Werth der Kräftefunktion u_7 für den Fall $n=7$ der Anziehung finden. Hieraus wieder der Werth der Kräftefunktion u_9 für die Anziehung $n=9$ u. s. w.

Geht man andererseits von dem Fall der Anziehung $n=6$ aus, so lässt sich daraus die Kräftefunktion des Dreiecks AOC für $n=8$, hieraus für $n=10$ finden u. s. w.

Da aber die Bestimmung der Kräftefunktion des homogenen Polyeders im wesentlichen von der Bestimmung der Kräftefunktion des Dreiecks AOC abhängt, so lässt sich auf dem angegebenen Wege auch die Kräftefunktion des Polyeders für ein beliebiges n finden, wenn nur dieselbe für $n=5$ und $n=6$ bekannt ist.

Für den Fall $n=5$ finden wir aus (3) des vorigen §:

$$u_5 = \frac{1}{2h^2} \cdot \frac{m}{l} arc\,tg \frac{s_1}{l}$$

Setzen wir hier $l = \sqrt{h^2+m^2}$, differenziren dann nach h^2 und multipliziren das Resultat mit $-\frac{1}{2}$, so lässt sich dasselbe in folgende Form bringen:

$$\frac{m}{4h^4}\left\{\frac{1}{l} arc\,tg \frac{s_1}{l}\left(1+\frac{1}{2}\cos^2\eta\right)+\frac{s_1}{r_1^2}\cdot\frac{1}{2}\cos^2\eta\right\}$$

ein Ausdruck, der in der That u_7 darstellt.

Verfasser ist geboren am 17. Dezember 1859 zu Homburg v. d. Höhe, erwarb sich Michaelis 1878 das Zeugniss der Reife an der Musterschule (Realgymnasium) zu Frankfurt a. M. und widmete sich dann auf den Universitäten zu Berlin und Marburg dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften. Im Sommersemester 1882 erwarb sich derselbe von der Königlichen Prüfungscommission zu Marburg das Zeugniss pro facultate docendi und ist seit Michaelis 1883 im höheren Schulamte thätig.